

素环理想上的导子

王立¹, 陈光海¹, 杜君花²

(1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 齐齐哈尔大学 理学院,
黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘 要: 讨论了素环理想上导子的性质. 设 R 是 6-扭自由的素环, I 是 R 的非零理想, Z 是环 R 的中心, 若存在非零导子 d 满足对任意 $x \in I$ 均有 $d(x^3) \in Z$, 且 $I \cap Z \neq \{0\}$ 或对任意的 $x \in I$ 均有 $[x, d(x^2)] \in Z$, R 则环交换.

关键词: 素环; 导子; 扭自由

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)05-0105-02

Ideals in Prime Rings with Derivations

WANG Li¹, CHEN Guang-hai¹, DU Jun-hua²

(1. School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;
2. School of Science, Qiqihar University, Qiqihar 161006, China)

Abstract: In this paper, we discuss the property of ideals in prime rings with derivations. Let R is a prime rings with 6-torsion free, I is a nonzero ideal of R and Z is the center of R , if there exists a nonzero derivation d such that $d(x^3) \in Z$ and $I \cap Z \neq \{0\}$ for all $x \in I$ or $[x, d(x^2)] \in Z$ for all $x \in I$, then R is a commutative ring.

Key words: prime ring; derivation; torsion free

自 Posner 在文 [1] 中讨论了素环和半素环上导子的问题后, 许多人在这方面进行了研究. 1957 年 Posner 首先证明了具有中心化的非零导子的素环一定是可换环, 1984 年, Mayne 推广了 Posner 定理^[2], 讨论了对任意 $x \in I$ 均有 $[x, d(x)] \in Z$ 的情况, 1994 年又讨论了任意的 $x \in I$ 均有 $[x^2, d(x)] \in Z$ 以及 $d(x^2) \in Z$ 的情况^[3], 但没有讨论 $d(x^3) \in Z$ 的情况和 $[x, d(x^2)] \in Z$ 的情况, 本文针对这两种情况进行讨论, 并受文 [2] 和文 [3] 的启发, 得到了环 R 交换的一些新条件.

为了证明结果, 首先给出一些引理.

引理 1^[4] 设 R 为素环, I 是 R 的非零理想, 若存在非零导子 d 满足对任意 $x \in I$ 均有 $[x, d(x)] \in$

Z , 则环 R 交换.

引理 2^[5] 设 R 是特征不为 2 的素环, I 是 R 的非零理想, 若存在非零导子 d 满足对任意的 $x \in I$ 均有 $[x^2, d(x)] \in Z$, 则环 R 交换.

引理 3^[6] Z 为环 R 的中心, d 为 R 的导子, 则 $d(Z) \subseteq Z$.

定理 1 设 R 是 6-扭自由的素环, I 是 R 的非零理想, Z 是环 R 的中心, 若存在非零导子 d 满足对任意 $x \in I$ 均有 $d(x^3) \in Z$ 且 $I \cap Z \neq \{0\}$, 则环 R 交换.

证明: 由已知 $x \in I$ 均有 $d(x^3) \in Z$ (1) 及 $I \cap Z \neq \{0\}$ 可知, 存在 $0 \neq c \in Z \cap I$, 用 $c+x$ 代 (1) 中的 x 有: $d((c+x)^3) \in Z$.

收稿日期: 2008-10-23

基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目 (A200601)

作者简介: 王立 (1984—), 男, 硕士研究生, E-mail: wangli19841116@126.com;

陈光海 (1953—), 男, 副教授.

整理有

$$3d(xc^2) + 3d(cx^2) \in Z$$

又 R 是 6-扭自由的, 故有

$$d(xc^2) + d(cx^2) \in Z$$

于是对任意 $x \in I$ 均有

$$x(d(xc^2) + d(cx^2)) = (d(xc^2) + d(cx^2))x$$

即

$$(xd(x) - d(x)x)c^2 + (xd(x^2) - d(x^2)x)c + (x^2d(c^2) - xd(c^2)x) = 0$$

又由 $c \in Z$ 可知, $d(c^2) \in Z$, 于是有

$$[x, d(x)]c + [x, d(x^2)] = 0$$

即

$$[cx, d(x)] + [x, xd(x)] + [x, d(x)x] = 0$$

化简可得

$$[cx + x^2, d(x)] = 0 \quad (2)$$

对任意 $x \in I$, 用 cx 代式 (2) 中的 x , 有

$$[c^2x + c^2x^2, d(cx)] = 0$$

又 $c \in Z$ 可知 $d(c) \in Z$, 故有

$$[x + x^2, d(x)] = 0 \quad (3)$$

用 $2x$ 代式 (3) 中的 x , 有

$$4[x + x^2, d(x)] + 4[x^2, d(x)] = 0$$

又由 R 是 6-扭自由的素环及 (3) 可知:

$$[x^2, d(x)] = 0$$

由引理 2 可得环 R 交换.

定理 2 设 R 是 6-扭自由的素环, I 是 R 的非零理想, Z 是环 R 的中心, 若存在非零导子 d 满足对任意的 $x \in I$ 均有 $[x, d(x^2)] \in Z$, 则环 R 交换.

证明: 若存在 $0 \neq c \in Z \cap I$, 则对任意的 $x \in I$ 用 $c+x$ 代 $[x, d(x^2)] \in Z$ 中的 x , 有

$$[x+c, d(x+c)^2] \in Z \quad (4)$$

又由 $c \in Z$ 可知 $d(c^2) \in Z$, 即有

$$[x, d(x^2) + d(2cx)] \in Z$$

又 $[x, d(x^2)] \in Z$, R 是 6-扭自由的素环, 故有

$$[x, d(x)] \in Z$$

由引理 1 可知环 R 交换.

若 $Z \cap I = \{0\}$, 即有

$$[x, d(x^2)] = 0 \quad (5)$$

对任意的 $x \in I, y \in I$, 用 $x+y$ 代式 (5) 中的 x , 有

$$[x+y, d(x+y)^2] = 0$$

整理可得

$$[x, d(y^2)] + [x, d(xy)] + [x, d(yx)] +$$

$$[y, d(x^2)] + [y, d(xy)] +$$

$$[y, d(yx)] = 0 \quad (6)$$

用 $x-y$ 代式 (5) 中的 x , 有

$$[x-y, d(x-y)^2] = 0$$

整理得

$$[x, d(y^2)] - [x, d(xy)] - [x, d(yx)] -$$

$$[y, d(x^2)] + [y, d(xy)] +$$

$$[y, d(yx)] = 0 \quad (7)$$

由式 (6) + 式 (7) 得

$$2([x, d(y^2)] + [y, d(xy)] + [y, d(yx)]) = 0$$

又 R 是 6-扭自由的素环, 故得

$$[x, d(y^2)] + [y, d(xy)] + [y, d(yx)] = 0$$

展开可得

$$[x, d(y)y] + [x, yd(y)] + [y, xd(y)] +$$

$$[y, d(x)y] + [y, yd(x)] +$$

$$[y, d(y)x] = 0$$

$$\Rightarrow -d(y)yx + xyd(y) + yxd(y) -$$

$$d(x)y^2 + y^2d(x) - d(y)xy = 0$$

即

$$[yx, d(y)] + [xy, d(y)] + [y^2, d(x)] = 0$$

用 x 代上式中的 y , 有

$$3[x^2, d(x)] = 0$$

又 R 是 6-扭自由的素环, 可得

$$[x^2, d(x)] = 0$$

由引理 2 可知, 环 R 交换.

参考文献:

- [1] POSNER E C. Derivations in Prime Rings [J]. Proc Amer Math Soc, 1957, 8: 1093 - 1100.
- [2] 杜君花, 陈光海, 杨新松. 关于环的交换性条件的若干注记 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2008, 6(13): 64 - 65.
- [3] 李 萍, 陈光海, 杨新松. 半质环的交换性条件 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2005, 5(9): 88 - 89.
- [4] MAYNE J. Centralizing Mappings of Prime Rings [J]. Canad Math Bull, 1984, 279: 122 - 126.
- [5] HUANG Yunbao, ZHU Linsheng. On Derivation of Prime Rings [J]. J of Math (PRC), 1994, 4: 579 - 586.
- [6] 王 宇, 张秀英. 素环上中心化广义导子 [J]. 东北师大学报自然科学版, 2001, 33(2): 116 - 118.

(编辑:付长缨)